

Прямоугольники

Решение .

Очевидное решение "в лоб" - проверять все возможные пары прямоугольников и подсчитывать те, которые могут быть накрыты, – понятно, не проходит: такое решение имеет сложность $O(N^2)$, а это слишком много для $N=200000$. Надо придумать что-то получше, как-то иначе организовать сравнения, чтобы не проверять каждую пару...

Сразу не придумывается? Понятно, что вопрос состоит в способе организации процесса сравнений. Попробуем заняться сначала локальным вопросом: а как проверить одну пару прямоугольников – можно ли одним из них накрыть другой? Возможно, это подскажет нам, как организовывать проверку всех прямоугольников.

Итак, имеется два прямоугольника. Можно ли первым накрыть второй? Конечно, можно разбирать всевозможные случаи, но хочется сделать проверку попроще. На этом пути мы быстро поймём, что условие "первым прямоугольником можно накрыть второй" эквивалентно условию "бóльшая сторона первого прямоугольника больше или равна большей стороны второго, и меньшая сторона первого прямоугольника больше или равна меньшей стороны второго". Получилось довольно громоздкая фраза. Сделаем её попроще. Повернем каждый прямоугольник так, чтобы бóльшая сторона стала его шириной, а меньшая – высотой. Тогда условие выглядит так: $w_1 \geq w_2$ и $h_1 \geq h_2$, где w и h – ширина и высота соответствующего прямоугольника. И тогда условие "прямоугольник A – маленький" равносильно условию "найдется другой прямоугольник, ширина которого не меньше ширины A , и высота не меньше высоты A ". Напомним, что все прямоугольники различные, поэтому если A накрывает B , то B не может накрывать A .

Итого. Прямоугольник является маленьким, если найдется прямоугольник, у которого ширина и высота не меньше соответствующих размеров данного прямоугольника. Переформулируем: прямоугольник является маленьким, если среди всех прямоугольников с большей (точнее говоря большей или равной) шириной найдется такой у которого высота тоже больше (или равна). Ну, а теперь уже все совсем просто: прямоугольник является маленьким, если его высота не превосходит наибольшей высоты всех прямоугольников с большей шириной.

Алгоритм получается моментально:

1. сортируем прямоугольники по возрастанию ширины,
2. просматриваем полученный список от конца к началу, вычисляя H - наибольшую высоту просмотренных прямоугольников: пусть h – высота просматриваемого прямоугольника. Тогда, если $h \leq H$, то просматриваемый прямоугольник маленький $h \leq H$, если же $h > H$, то – нет, зато изменяется H .

В общем, получилась смесь из "Очень простой задачи" (задача 4) и задачи про бамбук (задача 1) ☺. О сортировке довольно много написано в материалах к 4-й задаче. Но любопытно заметить, что здесь опять возникла сортировка. Это довольно естественно – нам ведь надо что-то сравнивать каждый элемент данных с каждым другим, по крайней мере так выглядит задача на первый взгляд. Применение сортировки вообще свойственно эффективному разрешению таких ситуаций. Впрочем, не только таких...