

60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 69

70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 79

90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 99

Итак, существует $9^2 = 81$ двузначный номер без цифры 8. Но к каждому из этих номеров можно приписать справа любую из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9 и получить трехзначный номер, не содержащий цифру 8. При этом получаются все трехзначные номера с требуемым свойством. В результате мы пашли $9^2 \cdot 9 = 9^3$ трехзначных номеров без восьмерок.

Таким же образом устанавливаем, что четырехзначных номеров без восьмерок существует $9^4 = 6561$, а пятизначных — $9^5 = 59\,049$.

Если бы председатель клуба был еще суевернее и отказался и от цифры 0, поскольку она походит на вытянутое колесо, то он смог бы составить лишь $8^3 = 512$ трехзначных номеров и их уже не хватило бы на всех членов клуба.

Кортежи

Номера, составленные из трех цифр, нельзя рассматривать как множества из трех элементов. Во-первых, в номерах цифры могут повторяться (например, 775), а в множествах элементы не повторяются. Во-вторых, в номерах важен порядок цифр (175 и 571 — совсем разные номера), а в множествах порядок элементов роли не играет. Поэтому, если мы хотим изучать такие объекты, как номера, или слова (в них тоже буквы могут повторяться, а от перестановки букв слово меняется), нужно ввести новое математическое понятие, отличное от понятия множества.

Это новое понятие математики называли кортежем (наряду со словом «кортеж» применяют названия «размещение», «конечная последовательность», «вектор», «слово» и т. д.). Кортеж — французское слово, означающее торжественное шествие. И у нас иногда говорят «кортеж автомашин», «свадебный кортеж» и т. д. При этом кортеж автомашин может состоять из нескольких «Волг», нескольких «Чаяк» и нескольких «Жигулей». Если считать машины одной и той же марки неразличимыми, то получим, что в кортеже автомашин один и тот же элемент может повторяться несколько раз.

В математике кортеж определяют так. Пусть имеется несколько множеств X_1, \dots, X_k . Представим себе, что их элементы сложены в мешки, а мешки перенумерованы. Вытащим из первого мешка какой-нибудь элемент (т. е. возьмем какой-нибудь элемент a_1 множества X_1), затем вытащим элемент a_2 из мешка X_2 и будем продолжать этот процесс до тех пор, пока из мешка X_k не будет вытасчен элемент a_k . После этого расставим полученные элементы в том порядке, в котором они появились из мешков (a_1, a_2, \dots, a_k) . Это и будет *кортежем длины k* , составленным из элементов множеств X_1, \dots, X_k . Элементы a_1, \dots, a_k называют *компонентами*, или *координатами*, кортежа.

Два кортежа называют *равными* в том и только том случае, когда они имеют одинаковую длину, а на соответствующих местах стоят одни и те же элементы.

В определении кортежа не уточнялось, могут ли множества X_1, \dots, X_k иметь общие элементы. На первый взгляд, этого не следовало бы допускать — если уж какой-нибудь элемент вытасчен из мешка и занял свое место, то откуда же взять его еще раз? Но мы живем в мире взаимозаменяемых деталей и запасных частей. Поэтому можно считать, что каждый элемент изготовлен в достаточном количестве экземпляров и в случае необходимости может лежать в нескольких мешках. Поэтому в кортежах координаты могут повторяться, например, кортеж может иметь такой вид: $(1, 2, 1, 3, 4, 4, 6)$. Не исключен и такой случай, когда все множества X_1, \dots, X_k совпадают. В этом случае можно считать, что у нас есть один мешок с элементами множества X , эти элементы извлекают из мешка, записывают, а потом кладут обратно в мешок.

С кортежами мы встречаемся очень часто. Например, семизначные номера телефонов в Москве — это кортежи длины 7, составленные из элементов множества $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, слова русского языка (точнее, их записи) — кортежи различной длины, составленные из букв русского алфавита, а предложения — кортежи, составленные из русских слов (отсюда видно, что координатами кортежей могут быть и кортежи).

Правило произведения

Возьмем несколько конечных множеств X_1, \dots, X_k , состоящих соответственно из n_1, \dots, n_k элементов, и найдем, сколько кортежей длины k можно составить из элементов этих множеств. Способ, которым мы решим эту задачу, по сути дела будет тем же самым, каким было найдено число трехзначных номеров без восьмерок. Сначала найдем число кортежей длины 1, составленных из элементов множества X_1 . Ясно, что их число равно n_1 . Возьмем теперь один из этих кортежей (a_1) и припишем к элементу a_1 справа по очереди все элементы множества X_2 . Получится n_2 кортежей длины 2, у которых первая координата равна a_1 . Но вместо a_1 можно было бы взять любой другой элемент из X_1 . Поэтому получается n_1 раз по n_2 кортежа, а всего $n_1 n_2$ кортежей длины 2 или, как чаще говорят, *пар*. Из каждой такой пары получим n_3 троек, приписав к ней по очереди все элементы множества X_3 , а всего $n_1 n_2 n_3$ троек. Продолжая этот процесс, получим в конце концов $n_1 n_2 \dots n_k$ кортежей длины k , составленных из элементов наших множеств.

Полученный результат является одним из важнейших в комбинаторике. На нем основан вывод многих формул этой науки. Есть лишь одна тонкость. Иногда множество X_2 бывает не задано, а определяется после выбора элемента a_1 , множество X_3 определяется после выбора элементов a_1 и a_2 и т. д. Но при этом, как бы мы ни выбрали элемент a_1 , выбор элемента a_2 возможен n_2 способами, при любом выборе элементов a_1 и a_2 на третье место имеется n_3 кандидатов и т. д. И в этом случае ответ получится тот же самый: общее число различных кортежей оказывается равным $n_1 n_2 \dots n_k$.

Так как для подсчета числа всевозможных кортежей приходится перемножать числа n_1, n_2, \dots, n_k , то выведенный результат называют «правилом произведения». Сформулируем это правило так.

Если элемент a_1 можно выбрать n_1 способами, после каждого выбора этого элемента следующий за ним элемент a_2 можно выбрать n_2 способами... после выбора элементов a_1, \dots, a_{k-1} элемент a_k выбирается n_k способами, то кортеж (a_1, a_2, \dots, a_k) можно выбрать $n_1 n_2 \dots n_k$ способами.

Подсчитаем, например, сколько слов, содержащих 6 букв, можно составить из 33 букв русского алфавита при

условии, что любые две стоящие рядом буквы различны (например, слово «корова» допускается, а слово «колось» нет). При этом, разумеется, мы будем писать не только слова, имеющие смысл, но и такие, например, бессмысленные, как «трнаук» и т. п.

В этом случае на первое место у нас 33 кандидата. Но после того как первая буква выбрана, вторую можно выбрать лишь 32 способами — ведь повторять первую букву нельзя. На третье место тоже 32 кандидата — первую букву уже можно повторить, а вторую — нельзя. Также убеждаемся, что на все места, кроме первого, имеется 32 кандидата. А так как число этих мест равно 5, то получаем ответ $33 \cdot 32 \cdot 32 \cdot 32 \cdot 32 \cdot 32 = 1\,107\,396\,236$.

Размещения с повторениями

Множества X_1, \dots, X_k , из элементов которых состоят кортежи, могут иметь общие элементы. В частности, все они могут совпадать с одним и тем же множеством X , содержащим n элементов. Кортежи длины k , составленные из элементов n -множества X , называют *размещениями с повторениями* из n элементов по k , а их число обозначают \bar{A}_n^k ¹

Из правила произведения сразу вытекает, что число размещений с повторениями из n элементов по k равно произведению k сомножителей, каждый из которых равен n , т. е. n^k . Итак, доказана формула

$$\bar{A}_n^k = n^k. \quad (1)$$

Коды

При передаче сообщений по телеграфу используют различные коды, позволяющие представлять буквы, цифры и знаки препинания в виде кортежей из точек и тире. Первый такой код был предложен в 1838 г. изобретателем электрического телеграфа американцем Морзе. В этом коде число символов для каждой буквы различно. Для букв, которые встречаются часто, выбираются коды с малым

¹ От французского слова *arrangement* — размещения. Черта ставится, чтобы отличить их от размещений без повторений, о которых мы расскажем позднее.

числом символов, а для редко встречающихся букв — с большим числом символов. Например, буква «е» передается одной точкой, а редко встречающаяся буква «э» — набором из 5 символов...—.. Это позволяет экономно передать текст, используя символы . и —. Морзе не утруждал себя глубокими исследованиями, чтобы подсчитать относительную частоту, с которой встречаются буквы в английских текстах — он просто пошел в ближайшую типографию и подсчитал число литер в наборных кассах. Лишь в 40-х годах XX в. американский ученый Клод Шеннон построил теорию информации, и на ее основе рассчитал, какой же код окажется самым выгодным; для этого ему пришлось учитывать не только частоту, с которой встречаются отдельные буквы, но и частоты сочетаний букв по две, по три и т. д.

Откуда же в коде Морзе взялось число 5? Почему нельзя передавать сообщения, используя лишь комбинации точек и тире, содержащие не более 4 знаков? Ответ на этот вопрос дает формула для размещений с повторениями. Из нее вытекает, что из точки и тире можно построить лишь два кортежа длины один (это, конечно, ясно и без всяких формул). Далее, из тех же знаков можно построить 2^2 кортежа длины 2, 2^3 кортежа длины 3, 2^4 кортежа длины 4. Общее число букв, которые можно передать кортежами точек и тире, имеющими длину от 1 до 4, равно $2 + 4 + 8 + 16$, т. е. 30. А в русском алфавите 33 буквы, да еще надо передавать цифры и знаки препинания. Ясно, что кортежей длины от 1 до 4 не хватает, надо брать еще кортежи длины 5 — тогда получается 62 кортежа, чего вполне достаточно для передачи всех букв, цифр и т. д.

Секретные замки

Для запираания сейфов и автоматических камер хранения багажа применяют секретные замки, которые открываются лишь тогда, когда набрано «тайное слово» (или тайный набор цифр). Это слово набирают с помощью одного или нескольких дисков, на которых изображены буквы (или цифры). Пусть число букв на каждом диске равно 12, а число дисков равно 5. *Сколько неудачных попыток может быть сделано человеком, не знающим секретного слова и подбирающим его наудачу?*

Из условия задачи видно, что порядок выбираемых букв существен (одно дело набрать на первом диске букву «а», а на втором букву «б», а другое — набрать эти же буквы в обратном порядке). Поэтому мы имеем здесь дело с кортежами. При этом никаких ограничений на эти кортежи не наложено. Так как по условию каждая буква может быть выбрана 12 способами, а длина кортежей равна 5, то по формуле (1) получаем, что число комбинаций равно $12^5 = 248\ 832$. Значит, неудачных попыток может быть 248 831. Считая по 10 секунд на одну попытку, получаем, что для открытия сейфа понадобится более 340 часов непрерывной работы. Впрочем, обычно сейфы делают так, чтобы после первой же неудачной попытки раздавался сигнал тревоги.

Первенство по футболу

В высшей лиге первенства СССР по футболу участвуют 16 команд. Разыгрываются 3 медали: золотая, серебряная и бронзовая. Перед началом первенства был объявлен конкурс знатоков, в котором требовалось указать распределение медалей. Сколько различных ответов можно дать на этот вопрос?

Во-первых, ясно, что здесь мы имеем дело с кортежами длины 3, а не с множествами из 3 элементов — ведь одно дело, когда золотую медаль получил «Арарат», а серебряную — киевское «Динамо», а другое, когда они меняются ролями и чемпионом страны становится «Динамо». Но в рассматриваемой задаче есть своеобразные черты, ведь теперь ни один элемент не может дважды встретиться в кортеже победителей: одна и та же команда не может получить, например, и золото, и бронзу. Поэтому нам надо решить такую задачу: *найти число кортежей длины 3, составленных из 16 команд, в которых ни одна команда не повторяется дважды.*

Золотую медаль может, вообще говоря, получить любая из 16 команд (мяч, как известно, круглый...). Но если какая-нибудь команда завоевала золотые медали, то на второе место претендуют 15 команд — все, кроме чемпиона. А после распределения золотой и серебряной медалей остаются лишь 14 претендентов на бронзовые медали. По правилу произведения выводим, что число раз-

личных кортежей, удовлетворяющих поставленным требованиям, равно $16 \cdot 15 \cdot 14 = 3\,360$.

Точно так же решается общая задача: *имеется множество X , состоящее из n элементов. Сколько кортежей длины k можно составить из элементов этого множества, если все элементы каждого кортежа должны быть различными?*

Кортежи, подчиненные этому условию, называют *размещениями без повторений* из n элементов по k , а их число обозначают A_n^k . Чтобы сосчитать A_n^k , будем рассуждать так: на первое место у нас n кандидатов. После того как оно заполнено, на второе место остаются $n - 1$ кандидатов, на третье $n - 2$ кандидатов и т. д. На k -е место имеется $n - k + 1$ кандидатов (после того как мы выбрали $k - 1$ элемент, остается $n - (k - 1) = n - k + 1$ элементов). Применяя правило произведения, находим

$$A_n^k = n(n - 1) \dots (n - k + 1). \quad (2)$$

Эту формулу можно записать иначе, умножив числитель и знаменатель на $(n - k) \dots 1$. В числителе получится произведение всех чисел от 1 до n . Такие произведения часто встречаются в комбинаторике. Их называют *факториалами* и обозначают $n!$ (читают n факториал). Таким образом,

$$A_n^k = \frac{n!}{(n - k)!}. \quad (3)$$

Два размещения без повторений из n элементов по n состоят из одних и тех же элементов, расположенных в различном порядке. Поэтому такие размещения называют *перестановками* из n элементов. Их число обозначают P_n . По формуле (2) получаем

$$P_n = A_n^n = n(n - 1) \dots 1 = n! \quad (4)$$

Задача о ладьях

При решении задачи о ферзях (стр. 40) основная трудность состояла в отыскании хотя бы одного нужного нам расположения. В аналогичной задаче о ладьях трудность в ином (ладьи бьют по горизонталям и вертикалям). Расставить ладьи так, чтобы они не били друг друга, совсем

легко — достаточно выстроить их по диагонали. Труднее узнать, сколькими способами их можно расположить требуемым образом — вообще в одних комбинаторных задачах трудно найти хотя бы одно решение, а в других решений много, а трудность состоит в их пересчете.

Итак, решим такую задачу: *найти число способов расстановки восьми ладей на шахматной доске, при которых они не бьют друг друга.*

Мы решим сразу более общую задачу:

Сколькими способами можно расставить n ладей на $(n \times n)$ -доске, так, чтобы они не били друг друга?

Каждый способ задается перестановкой n чисел $1, 2, \dots, n$ — указываются номера горизонталей занятых полей на первой, второй, \dots , n -й вертикалях. Но число таких перестановок равно $n!$. Значит, лады можно расставить $n!$ способами. При $n = 8$ получаем $8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40\,320$ способов.

(1×1) -доска состоит из одного поля. Поставить на нее одну ладью можно единственным образом. Поэтому считают, что $1! = 1$. (0×0) -доска совсем не имеет полей, или, как говорят математики, имеет *пустое множество* полей. «Поставить» на нее 0 ладей можно лишь одним способом — ничего нигде не ставить (в комбинаторике часто удобно считать и такие способы — иначе пришлось бы делать много лишних оговорок). Значит, надо положить $0! = 1$. Возможно, читателя удивит это равенство. Чтобы уменьшить его удивление, заметим, что для любого n верно соотношение $n! = n \cdot (n - 1)!$ (например, $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3 \cdot 2!$). Полагая в нем $n = 1$, получаем, что $1! = 1 \cdot 0!$, а потому $0! = 1$. Если это рассуждение и не является доказательством (соотношение-то было доказано лишь при $n > 1$), оно делает более естественным данное выше определение для $0!$

Перестановки с повторениями

Четыре цифры $1, 2, 3, 4$ можно переставлять друг с другом $P_4 = 4! = 24$ способами. В слове «мама» четыре буквы. Но перестановок из этих букв можно составить не 24, а только 6:

мама, маам, ммаа, амам, аамм, амма

Чтобы понять, почему так случилось, поставим в соответствии цифрам 1 и 2 букву «м», а цифрам 3 и 4 — букву «а». Тогда, например, перестановке 1234 будет соответствовать слово ммаа, а перестановке 1324 — слово мама. Но слово ммаа соответствует не только перестановке 1234, но и еще трем перестановкам: 2134, 1243 и 2143. Читатель может убедиться в этом прямой подстановкой букв вместо цифр. Но более поучительно такое рассуждение: если цифры 1 и 2 меняются местами, то в соответствующем слове меняются местами две буквы «м», а потому само слово остается неизменным. Неизменным оно остается и при взаимной перестановке цифр 3 и 4 — при этом в слове меняются местами две буквы «а». Теперь ясно, как из любой перестановки получить перестановки, приводящие к тому же самому слову: можно либо оставить эту перестановку неизменной, либо поменять в ней местами цифры 1 и 2, либо поменять местами цифры 3 и 4, либо, наконец, одновременно переставить 1 и 2, а также 3 и 4. Всего получается 4 перестановки цифр, отвечающие одному и тому же слову. Вот эти четверки перестановок:

1234	2134	1243	2143
1324	2314	1423	2413
1342	2341	1432	2431
3214	3124	4213	4123
3142	3241	4132	4231
3412	3421	4312	4321

Отсюда видно, что все множество из 24 перестановок цифр 1, 2, 3, 4 распадается на четверки, дающие одно и то же слово. Поэтому число различных слов равно $4!/4 = 6$.

Рассмотрим теперь задачу в общем виде. Пусть дан кортеж длины n , составленный из элементов множества $X = \{x_1, \dots, x_k\}$, причем буква x_1 входит в этот кортеж n_1 раз, \dots , буква x_k — n_k раз. Тогда $n = n_1 + \dots + n_k$. Если переставлять в этом кортеже буквы, будут получаться новые кортежи, имеющие тот же состав, т. е. такие, что буква x_1 входит в них n_1 раз, \dots , буква x_k входит n_k раз. Мы будем называть эти кортежи *перестановками с повторениями* из букв x_1, \dots, x_k , имеющими состав (n_1, \dots, n_k) . Число таких перестановок обозначим $P(n_1, \dots, n_k)$.

С помощью правила произведения находим, что число перемещений букв, не меняющих данную перестановку, равно $n_1! \dots n_k!$. Но n чисел можно переставлять друг с другом $n!$ способами. Поэтому число различных перестановок букв, имеющих состав (n_1, \dots, n_k) , т. е. $P(n_1, \dots, n_k)$, в $n_1! \dots n_k!$ раз меньше, чем $n!$:

$$P(n_1, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \dots n_k!}, \quad (5)$$

где $n = n_1 + \dots + n_k$.

Пользуясь формулой (5), легко узнать, например, сколько различных кортежей получится, если переставлять буквы слова «математика». Это слово имеет состав (2, 3, 2, 1, 1, 1) и потому получается

$$P(2, 3, 2, 1, 1, 1) = \frac{10!}{2! 3! 2! 1! 1! 1!} = 151\,200$$

кортежей.

Покупка пирожных

В кондитерском магазине продаются пирожные 4 сортов: наполеоны, эклеры, песочные и слоеные. Сколькими способами можно купить 7 пирожных?

Если записывать порядок, в котором продавец кладет пирожные в коробку, то получится кортеж длины 7 из 4 элементов — сортов пирожных. Однако два кортежа одного и того же состава, например (н, н, э, п, с, с, э) и (э, н, с, н, э, п, с) (здесь записаны первые буквы названий пирожных), означают по сути дела одну и ту же покупку: 2 наполеона, 2 эклера, 2 слоеных пирожных и 1 песочное. Поэтому два способа сделать покупку надо считать различными лишь в случае, когда соответствующие кортежи отличаются своим составом. Итак, мы пришли к следующей задаче.

Сколько различных составов могут иметь кортежи длины k из n элементов?

По-другому эту же задачу можно сформулировать и так: назовем два кортежа эквивалентными, если они имеют одинаковый состав. На сколько классов эквивалентности разбивается при этом вся совокупность кортежей длины k из n элементов? Такие классы эквивалентности назы-

вают сочетаниями с повторениями из n элементов по k , а их число обозначают \bar{C}_n^k .

Чтобы стало ясно, как вычислять \bar{C}_n^k в общем случае, вернемся к задаче о пирожных. Каждую покупку пирожных можно задать кортежем длины 4, состоящим из неотрицательных целых чисел, сумма которых равна 7. Например, кортеж (3, 2, 0, 2) означает, что куплено 3 наполеона, 2 эклера, ни одного песочного пирожного и 2 слоеных. Конечно, прежде чем задавать покупки кортежами чисел, сначала надо договориться, в каком порядке мы называем сорта пирожных; иначе можно оказаться в положении мужа, который никак не мог вспомнить, что ему поручила купить жена: 6 бутылок молока и 2 бутылки пива или 2 бутылки молока и 6 бутылок пива. Но каждый кортеж из неотрицательных целых чисел можно записать, пользуясь лишь единицами и нулями: для этого достаточно заменить каждое число столькими единицами, чему равно это число, а единицы, соответствующие различным числам, отделить друг от друга нулями. Например, кортеж (3, 2, 0, 2) запишется с помощью единиц и нулей так:

$$(1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1),$$

а записи (1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1) соответствует кортеж (2, 3, 1, 1). Поскольку числовые кортежи, задающие различные варианты покупки пирожных, имеют длину 4, а сумма входящих в них чисел равна 7, то количество нулей в их записях будет равно 3, а количество единиц равно 7. Но число перестановок из 3 нулей и 7 единиц равно

$$P(3, 7) = \frac{10!}{3! 7!} = 120.$$

Значит, покупку можно совершить 120 способами.

В общем случае формула для \bar{C}_n^k выводится точно так же. Любой состав кортежа длины k из n элементов имеет вид (k_1, \dots, k_n) , где k_1, \dots, k_n — неотрицательные целые числа, сумма которых равна k . Заменяя каждое из чисел k_j соответствующим количеством единиц и разделяя нулями единицы, отвечающие различным числам, получаем кортеж из $n - 1$ нулей и k единиц. При этом каждому составу отвечает одна и только одна запись с помощью нулей и единиц, а каждая такая запись

вадает один и только один состав. Поэтому число различных составов равно числу перестановок с повторениями из $n - 1$ нулей и k единиц, т. е. $\bar{C}_n^k = P(n - 1, k)$. Итак, мы доказали, что

$$\bar{C}_n^k = P(n - 1, k) = \frac{(n + k - 1)!}{(n - 1)! k!}. \quad (6)$$

Карточки «Спортлото»

Перед каждым тиражом «Спортлото» миллионы людей заполняют карточки, пытаясь угадать заветные 6 номеров из 49. У каждого из них своя система — одни зачеркивают подряд 6 номеров, другие — через три на четвертый, третьи вспоминают дни, в которые одержала победу любимая команда и т. д. Выясним, есть ли хоть два человека, ожидающие одних и тех же номеров? Чтобы с уверенностью ответить на этот вопрос, надо подсчитать, *сколькими способами можно выбрать 6 номеров из 49.*

С точки зрения математика, ничего не изменилось бы, если надо было бы выбрать не 6 номеров из 49, а, скажем, 6 книг из 49 различных книг, 6 карт из 49 и т. д. Чтобы не связывать задачу с конкретным выбором предметов, лучше говорить не о числах, книгах, картах и т. д., а об элементах некоторого множества.

Итак, нам нужно найти число k -подмножеств в n -множестве X . Такие подмножества называют также *сочетаниями из n элементов по k* . Число таких сочетаний обозначают C_n^k .

Задача о вычислении C_n^k сводится к уже решенной нами выше задаче о числе перестановок с повторениями. В самом деле, расставим любым образом заданные n элементов и зашифруем любой выбор k элементов кортежем длины n из k единиц и $n - k$ нулей — если элемент выбирают, то на его месте пишут 1, а если не выбирают, то 0. Например, выбор элементов a, c из элементов a, b, c, d, e записывается кортежем 10100. Каждому кортежу отвечает свой способ выбора элементов. Поэтому число k -подмножеств в n -множестве равно числу перестановок с повторениями из $n - k$ нулей и k единиц, т. е. оно равно $P(n - k, k)$. А

$$P(n - k, k) = \frac{n!}{k! (n - k)!}.$$